

Problem Set 13&14: 离散概率初步、离散随机变量及其数学期望

(提交截止时间: 4 月 15 日 10:00)

Problem 1

设 E_1 和 E_2 是两个事件, 如果 $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$, 就称 E_1 和 E_2 是独立的. 如果把一枚硬币被抛掷 3 次时所有可能的结果构成一个集合, 把这个集合的子集看做事件, 确定下面的每一对事件是否是独立的.

- a) E_1 : 第一次硬币头像向下; E_2 : 第二次硬币头像向上.
- b) E_1 : 第一次硬币头像向下; E_2 : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.
- c) E_1 : 第二次硬币头像向下; E_2 : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.

Problem 2

设 p 和 q 是素数且 $n = pq$. 随机选择小于 n 的正整数, 该正整数不被 p 或 q 整除的概率是多少?

Problem 3

设离散型随机变量 $X \in \{1, 2, 3\}, Y \in \{1, 2, 3\}$ 的联合概率 $P(X \cap Y)$ 分布为:

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
Pr	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

若 X, Y 相互独立, 求 a, b .

Problem 4

随机产生 3 位比特串, 设 E 是这个串含有奇数个 1 的事件, F 是这个串以 1 开始的事件. E 和 F 是独立的吗?

Problem 5

设 E_1, E_2, \dots, E_n 是 n 个事件满足 $p(E_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: $P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \dots P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1})$

Problem 6

假如某诊所对病人的检测中有 4% 的人感染了禽流感病毒. 此外, 假定对给定的禽流感血液检测 (检测结果为阳性不等价于感染病毒, 即感染了禽流感的人也可能呈阴性, 没有感染的人也可能呈阳性), 感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性, 没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性. 那么, 下列概率是多少?

- a) 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒.
- b) 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒.
- c) 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒.
- d) 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒.

Problem 7

如果我们有关于一条随机信息是不是垃圾邮件的先验知识. 特别地, 假定经过一段时期, 我们发现收到了 s 条垃圾邮件信息和 h 条非垃圾邮件信息.

- a) 利用这一信息估计所收到的信息是垃圾邮件的概率 $p(S)$ 和所收到的信息不是垃圾邮件的概率 $p(\bar{S})$.
- b) 利用贝叶斯定理和 a) 估计收到的含有字 w 的信息是垃圾邮件的概率, 其中 $p(w)$ 是 w 出现在垃圾邮件信息中的概率, $q(w)$ 是 w 出现在非垃圾邮件信息中的概率.

Problem 8

当一个均匀的骰子被掷 10 次时, 出现偶数点的次数的方差是多少?

Problem 9

设 X 和 Y 是随机变量, 并且对于样本空间 S 的所有点, X 和 Y 是非负的. 设 Z 是如下定义的随机变量: 对所有的元素 $s \in S, Z(s) = \max(X(s), Y(s))$. 证明 $E(Z) \leq E(X) + E(Y)$.

Problem 10

证明如果事件 A 和 B 独立, 那么事件 \bar{A} 和 \bar{B} 也独立.

Problem 11

某人爱说谎, 三句只能信两句. 他扔了一个骰子, 报告说是“四点”. 问这个骰子真是四点的概率是多少?

Problem 12

假设现在有 100 个座位, 从 1 号到 100 号, 从其中随机选择 25 个座位, 所选的连续座位对的期望是多少?(譬如 $\{1, 2\}$ 就是一个连续座位对).